Chapter 4

微分方程式と機械系運動方程式

本章では, 機械系の運動方程式を微分方程式として表現し, その微分方程式を解くことによって運動の過渡現象を理解する。

4.1 機械系運動方程式とその解法

4.1.1 バネ・マス・ダンパによる機構系の運動

図 4.1のバネ（ばね定数: K）・マス（質量: M）・ダンパ（粘性係数: D）による機構系において, 平衡点 x から x_0 だけ変位させて $t=0$ でマスをリリースする。すなわち, 初期変位及び速度は $x(0)=x_0$, $\frac{dx}{dt}(0)=0$ であり, リリース後のマスへの推力は $f=0$ とする。

(1) 本機構系では, 1) マスを加速させる推力: $M\dfrac{d^2x}{dt^2}$, 2) ダンパによる速度に比例する粘性力: $D\dfrac{dx}{dt}$, 3) バネによる平衡点からの変位に比例する弾性力: Kx, の3つの力が外部推力 f と釣り合う。以上の物理現象を基に, 本機構を記述する微分方程式を立てなさい。

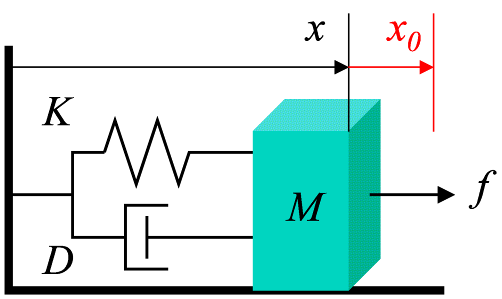

図 4.1: バネ・マス・ダンパによる機構系

【解】マスの有効加速推力, ダンパの粘性力, バネの弾性力の和が外部推力と釣り合うことから, 次の微分方程式が成立する。

$$M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + D\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f = 0 \tag{4.1}$$

(2) $M = 10,\ D = 100,\ K = 100,\ x_0 = 3$ の場合, 上記で与えられた初期値問題を $x(t)$ について解き, $t = 0 \sim 10$ の範囲でグラフを描きなさい。

【解】(4.1) 式の特性方程式とその解は, 以下で与えられる。

$$M\lambda^2 + D\lambda + K = 0 \ \ \Rightarrow \ \ \lambda = \frac{-D}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\frac{D}{M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$$

問題のパラメータの値を代入して λ を計算すれば,

$$\lambda_1 = -5 + \sqrt{15} = -1.13,\ \lambda_2 = -5 - \sqrt{15} = -8.87$$

と実 2 根となるので, (4.1) 式の $f = 0$ に対する同次方程式の一般解は次式で与えられる。

$$x(t) = C_1\varepsilon^{\lambda_1 t} + C_2\varepsilon^{\lambda_2 t}$$

この一般解に対して, 題意より次の初期条件が与えられる。

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = x_0 \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0 \end{cases}$$

この初期条件より任意定数が決定され, その結果, 変位 $x(t)$ は次のように与えられる。

$$C_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}x_0,\ C_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}x_0 \ \ \Rightarrow \ \ x(t) = 3.44\varepsilon^{-1.13t} - 0.437\varepsilon^{-8.87t}$$

以上から, 変位の過渡応答波形を描けば, 図 4.2のようになる。

(3) (2) に対して粘性係数のみが $D = 10$ と変化した場合, 同等な初期値問題を $x(t)$ について解き, その波形を (2) のグラフに重ねて描きなさい。

【解】(4.1) 式の特性方程式の解は $\lambda = -0.5 \pm j3.12 = \alpha \pm j\beta$ と共役複素 2 根となるので, 同次式の一般解として次式が得られる。

$$x(t) = \varepsilon^{\alpha t}\left\{C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t\right\}$$

前問同様, 初期条件を与えることによって任意定数を決定すれば, 変位 $x(t)$ は以下のように与えられる。

$$\begin{cases} x(0) = C_1 = x_0 \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = \alpha C_1 + \beta C_2 = 0 \end{cases}$$

$$C_1 = x_0,\ C_2 = -\frac{\alpha}{\beta}x_0 \ \ \Rightarrow \ \ x(t) = \varepsilon^{-0.5t}\left\{3\cos 3.12t + 0.48\sin 3.12t\right\}$$

以上から, 変位の過渡応答波形を描けば, 図 4.3のようになる。

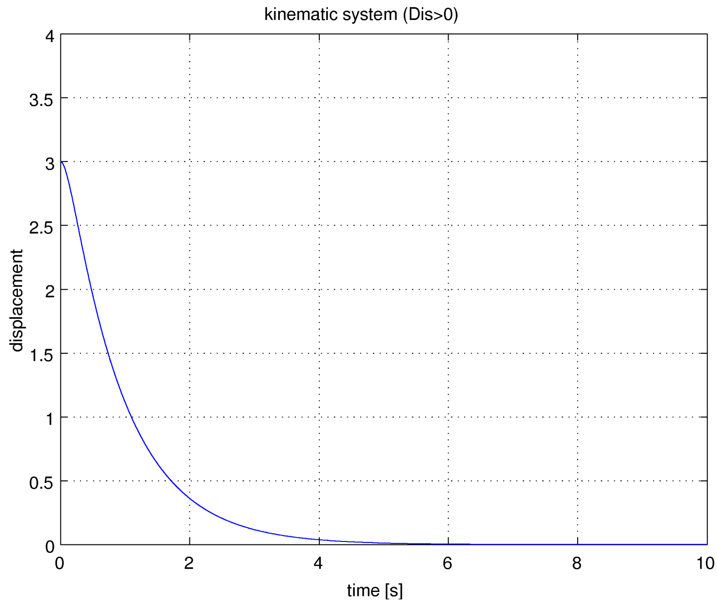

図 4.2: バネ・マス・ダンパによる機構系の過渡応答（$Dis > 0$ の場合）

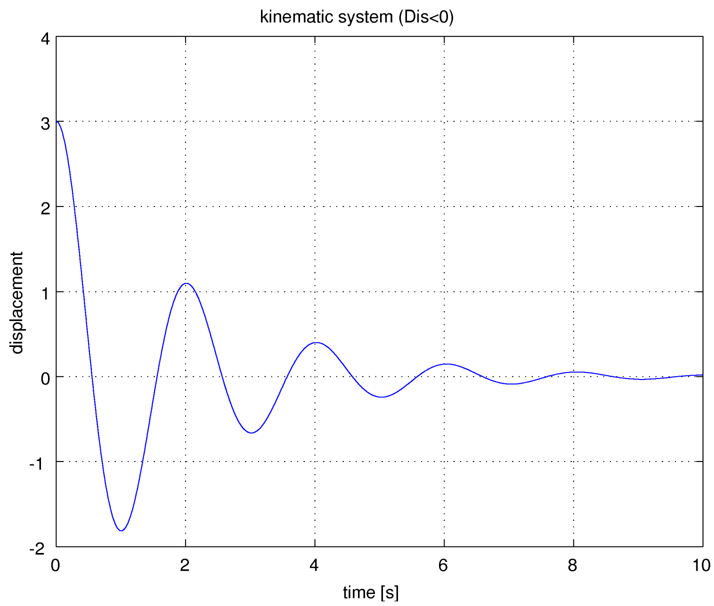

図 4.3: バネ・マス・ダンパによる機構系の過渡応答（$Dis < 0$ の場合）