# Chapter 1

# 1 階微分方程式

## 1.1　変数分離形微分方程式

[変数分離形微分方程式]

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{1.1}$$

例えば

$$\frac{dy}{dx} = (2x+1)y \quad \rightarrow \quad f(x) = 2x+1,\ g(y) = y$$

**＜解法＞**　$g(y) \neq 0$ として, 両辺を $g(y)$ で割る[1]。

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1.2}$$

上式を解くに当たり, 次の公式を思い出そう。

【合成関数の微分公式】

$$\frac{d}{dx}H(y) = \frac{d}{dy}H(y)\frac{dy}{dx} = h(y)\frac{dy}{dx}$$

ここで, $\dfrac{d}{dy}G(y) = \dfrac{1}{g(y)}$ (すなわち, $G(y)$ は $\dfrac{1}{g(y)}$ の原始関数) と考えれば,

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}G(y) = f(x) \tag{1.3}$$

[1] $g(y) = 0$ に対しては個別対応が必要であることに注意。

これは, $G(y)$ が $x$ の関数として $f(x)$ の原始関数であることを示している。

変数分離形微分方程式の解

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C, \quad C : \text{任意定数} \tag{1.4}$$

(1.4) 式は厳密に解を導出したものであったが, 形式的に

$$\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x) \quad \to (\text{両辺に } dx \text{ を掛ける}) \to \quad \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

として, 両辺を $y$, $x$ について積分したものと等しいことが分かろう。

**＜例 1-1＞** $\dfrac{dy}{dx} = (2x+1)y$

両辺を $y(\neq 0)$ で割って, $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = 2x+1$ を得る。両辺を $x$ で積分して,

$$\int \frac{1}{y} dy = \int (2x+1) dx + C'$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm \varepsilon^{(x^2+x+C')} = C\varepsilon^{(x^2+x)}$$

但し, $C = 0$ で $y = 0$ も含んでいることに注意。

■

## 1.2 初期値問題

1階微分方程式で, $y(x_0) = y_0$ ($x_0$, $y_0$; 定数, **初期条件**) が与えられると, 任意定数 $C$ が決定される。これを, **“初期値問題を解く”** という。

**＜例 1-2＞** $\dfrac{dy}{dx} = y(1-y)$ で, (1) $y(0) = \dfrac{1}{2}$, (2) $y(0) = 1$

$$\frac{1}{y(1-y)} \frac{dy}{dx} = 1 \quad \leftarrow (y \neq 0,\ y \neq 1 \text{ なので (2) の初期条件には注意}$$

$$\int \frac{1}{y(1-y)} dy = \int \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y-1} \right) = \int dx + C'$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{C\varepsilon^x}{C\varepsilon^x - 1}$$

(1) $y(0) = \dfrac{C}{C-1} = \dfrac{1}{2}$ より, $C = -1 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{\varepsilon^x}{\varepsilon^x - 1}$

(2) $y(0) = \dfrac{C}{C-1} = 1 \quad \rightarrow \quad$ これを満たす $C$ はない!!

元の式に戻ると, $y = 1$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

■

## 1.3 同次形微分方程式

**[同次形微分方程式]** 変数変換によって, 変数分離形微分方程式に変形可能な微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.5}$$

**＜解法＞** $u(x) = \dfrac{y(x)}{x} \rightarrow y = xu$ とおけば,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{xu\} = u + x\frac{du}{dx} \tag{1.6}$$

(1.5) 式に戻って,

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(u) \tag{1.7}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \quad \text{(変数分離形)} \tag{1.8}$$

同次形微分方程式の解

$$\int \frac{1}{f(u) - u} du = \int \frac{1}{x} dx + C, \quad u = \frac{y}{x} \tag{1.9}$$

**＜例 1-3＞** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y}{x}$

同次形を意識して, $\dfrac{dy}{dx} = 2 - \dfrac{y}{x}$ と考えて $y = xu$ で変数変換する。

$$u + x\frac{du}{dx} = 2 - u \quad \rightarrow \quad \frac{1}{u-1}\frac{du}{dx} = -\frac{2}{x} \quad \text{(変数分離形)}$$

$$\int \frac{1}{u-1} du = -\int \frac{2}{x} dx + C'$$

$$\Rightarrow \quad y = x + \frac{C}{x}$$

■

**＜例 1-4＞** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x-y}{x+y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}} = \frac{3-u}{1+u} = u + x\frac{du}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{u+1}{u^2+2u-3}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x} \quad \text{(変数分離形)}$$

$$\int \frac{1}{2}\frac{(u^2+2u-3)'}{u^2+2u-3}du = -\int \frac{1}{x}dx + C'$$
$$\Rightarrow \quad y^2 + 2xy - 3x = C$$

■

## 1.4 今週のレポート課題

1. 次の微分方程式の一般解を求めなさい。
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y+1}$
   (c) $x\dfrac{dy}{dx} = (x+1)y$
   (d) $y\dfrac{dy}{dx} = 2x$
   (e) $\dfrac{dy}{dx} = y\tan x$
2. 次の初期値問題の解を求めなさい。
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = 2y-4,\ y(0) = -1$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \varepsilon^{-y},\ y(0) = 0$
   (c) $y\dfrac{dy}{dx} = -x,\ y(1) = 2$
3. 次の微分方程式の一般解を求めなさい。
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y}{x}$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x+y}$
   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$