2.6 2階非同次方程式

[2階線形非同次微分方程式]

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=Q(x),\quad a,\, b;\ \text{定数} \tag{2.13}$$

ここで, 非同次方程式の特殊解を $\eta(x)$, 一般解を $y(x)$ とすれば,

$$\frac{d^2}{dx^2}\{y(x)-\eta(x)\}+a\frac{d}{dx}\{y(x)-\eta(x)\}+b\{y(x)-\eta(x)\}=0 \tag{2.14}$$

となる。上式より, $y(x)-\eta(x)$ は同次方程式の解であり, その基本解を $y_1(x)$, $y_2(x)$ とすれば

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\eta(x),\quad c_1,\, c_2;\ \text{任意定数} \tag{2.15}$$

を得る。従って, 1階微分方程式と同様, 以下の関係が導き出される。

[定数係数2階線形微分方程式の解]

$$[\textbf{非同次方程式の一般解}]=[\textbf{同次方程式の一般解}]+[\textbf{非同次方程式の特殊解}] \tag{2.16}$$

2.7 未定係数法

2階線形非同次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=Q(x) \tag{2.17}$$

に対して, 非同次方程式の特殊解 $\eta(x)$ の候補となる関数の形を特定し, その係数を決定する手法を “**未定係数法**” という。

特殊解の候補は, 非同次方程式右辺の $Q(x)$ に含まれる定数 $\Lambda\in\boldsymbol{R}$ が, (2.17) 式の同次方程式の特性方程式

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{2.18}$$

の解（特性根）であるかどうかで, 次のように場合分けされる。

2階非同次方程式の特殊解の形

(I) $Q(x) = Ax^d + Bx^{d-1} + \cdots$（$d$次多項式）の場合

$$
\begin{array}{lcl}
0\text{が特性根でないとき} & \rightarrow & \eta(x) = kx^d + lx^{d-1} + \cdots + m \\
0\text{が特性根で単解のとき} & \rightarrow & \eta(x) = x(kx^d + lx^{d-1} + \cdots + m) \\
0\text{が特性根で重解のとき} & \rightarrow & \eta(x) = x^2(kx^d + lx^{d-1} + \cdots + m)
\end{array}
$$

(II) $Q(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$（三角関数）の場合

$$
\begin{array}{lcl}
\pm j\alpha\text{が特性根でないとき} & \rightarrow & \eta(x) = k\cos\alpha x + l\sin\alpha x \\
\pm j\alpha\text{が特性根のとき} & \rightarrow & \eta(x) = x(k\cos\alpha x + l\sin\alpha x)
\end{array}
$$

(III) $Q(x) = A\varepsilon^{\beta x}$（指数関数）の場合

$$
\begin{array}{lcl}
\beta\text{が特性根でないとき} & \rightarrow & \eta(x) = k\varepsilon^{\beta x} \\
\beta\text{が特性根で単解のとき} & \rightarrow & \eta(x) = kx\varepsilon^{\beta x} \\
\beta\text{が特性根で重解のとき} & \rightarrow & \eta(x) = kx^2\varepsilon^{\beta x}
\end{array}
$$

＜例 2-7＞ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 4x^2$

特性根を求めれば,

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2,\ -1 \neq 0$$

より, 特殊解として $\eta(x) = kx^2 + lx + m$ を仮定する。

$$\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} - \frac{d\eta(x)}{dx} - 2\eta(x) = -2kx^2 - 2(k+l)x + 2k - l - 2m = 4x^2$$

$$\rightarrow \quad k = -2,\ l = 2,\ m = -3 \quad \Rightarrow \quad \eta(x) = -2x^2 + 2x - 3$$

■

＜例 2-8＞ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 6\varepsilon^{2x}$

特性根 $\lambda = 2,\ -1$ より, 2は単解であるから特殊解として $\eta(x) = kx\varepsilon^{2x}$ を仮定する。

$$\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} - \frac{d\eta(x)}{dx} - 2\eta(x) = 3k\varepsilon^{2x} = 6\varepsilon^{2x} \quad \rightarrow \quad k = 2$$

$$\Rightarrow \quad \eta(x) = 2x\varepsilon^{2x}$$

■

2.8 重ね合わせの原理

非同次方程式の $Q(x)$ が多項式, 三角関数, 指数関数, 及びこれらの一次結合である場合, 次の重ね合わせの原理で特殊解を構成できる。

特殊解の重ね合わせの原理

非同次方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=Q_1(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=Q_2(x) \tag{2.19}$$

の特殊解の一つがそれぞれ $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ のとき, 定数 k_1, k_2 に対して非同次方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=k_1Q_1(x)+k_2Q_2(x) \tag{2.20}$$

の一つの特殊解は $k_1\eta_1(x)+k_2\eta_2(x)$ である。

＜例 2-9＞ $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-2y=\varepsilon^x+4x$

それぞれの非同次式に対する特殊解は

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=\varepsilon^x &\quad\to\quad \eta_1(x)=-\frac{1}{2}\varepsilon^x\\ \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=4x &\quad\to\quad \eta_2(x)=-2x+1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad \eta(x)=-\frac{1}{2}\varepsilon^x-2x+1$$

■

2.9 定数変化法

2階定数係数非同次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=Q(x) \tag{2.21}$$

に対して, その同次方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0 \tag{2.22}$$

の基本解を $y_1(x)$, $y_2(x)$ としたとき, 同次方程式の一般解 $y(x)$ は

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x),\quad c_1,\ c_2;\ \text{定数} \tag{2.23}$$

と与えられた。ここで, c_1, c_2 を関数 $C_1(x)$, $C_2(x)$ と置き換えて

$$\eta(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{2.24}$$

が非同次方程式(2.21)式を満たすように $C_1(x)$, $C_2(x)$ を定めることで特殊解 $\eta(x)$ を求める手法を, “**定数変化法**” という。

(2.24)式を微分して

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx}y_1(x) + \frac{dC_2(x)}{dx}y_2(x) + C_1(x)\frac{dy_1(x)}{dx} + C_2(x)\frac{dy_2(x)}{dx} \tag{2.25}$$

を得るが, 特に

$$\frac{dC_1(x)}{dx}y_1(x) + \frac{dC_2}{dx}y_2(x) = 0 \tag{2.26}$$

を満たす $C_1(x)$, $C_2(x)$ を仮定すれば,

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = C_1(x)\frac{dy_1(x)}{dx} + C_2(x)\frac{dy_2(x)}{dx} \tag{2.27}$$

となる。さらに微分を進めて,

$$\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} = \frac{dC_1(x)}{dx}\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dC_2(x)}{dx}\frac{dy_2(x)}{dx} + C_1(x)\frac{d^2y_1(x)}{dx^2} + C_2(x)\frac{d^2y_2(x)}{dx^2} \tag{2.28}$$

以上を元の非同次方程式(2.21)式に代入すれば,

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} + a\frac{d\eta(x)}{dx} + b\eta(x) \\
=\ & \frac{dC_1(x)}{dx}\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dC_2(x)}{dx}\frac{dy_2(x)}{dx} + C_1(x)\left\{\frac{d^2y_1}{dx^2} + a\frac{dy_1}{dx} + by_1\right\} + C_2(x)\left\{\frac{d^2y_2}{dx^2} + a\frac{dy_2}{dx} + by_2\right\} \\
=\ & \frac{dC_1(x)}{dx}\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dC_2(x)}{dx}\frac{dy_2(x)}{dx} = Q(x)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

が得られる。

(2.26), (2.29)両式は $\dfrac{dC_1(x)}{dx}$, $\dfrac{dC_2(x)}{dx}$ に関する連立方程式

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \dfrac{dy_1(x)}{dx} & \dfrac{dy_2(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{dC_1(x)}{dx} \\ \dfrac{dC_2(x)}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q(x) \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

とみなすことができる。ここで,

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \dfrac{dy_1(x)}{dx} & \dfrac{dy_2(x)}{dx} \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

とおけば,

$$\boldsymbol{Y}^{-1}(x)=\frac{1}{\det\boldsymbol{Y}(x)}\begin{bmatrix}\dfrac{dy_2(x)}{dx} & -y_2(x)\\ -\dfrac{dy_1(x)}{dx} & y_1(x)\end{bmatrix} \tag{2.32}$$

より,

$$\begin{bmatrix}\dfrac{dC_1(x)}{dx}\\ \dfrac{dC_2(x)}{dx}\end{bmatrix}=\frac{1}{\det\boldsymbol{Y}(x)}\begin{bmatrix}\dfrac{dy_2(x)}{dx} & -y_2(x)\\ -\dfrac{dy_1(x)}{dx} & y_1(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ Q(x)\end{bmatrix}=\frac{1}{\det\boldsymbol{Y}(x)}\begin{bmatrix}-y_2(x)Q(x)\\ y_1(x)Q(x)\end{bmatrix} \tag{2.33}$$

従って, 特殊解 $\eta(x)$ は次式で与えられる。

$$\eta(x)=-y_1(x)\int\frac{y_2(x)Q(x)}{\det\boldsymbol{Y}(x)}dx+y_2(x)\int\frac{y_1(x)Q(x)}{\det\boldsymbol{Y}(x)}dx \tag{2.34}$$

2階非同次方程式の一般解

2階非同次方程式の一般解 $y(x)$ は, 同次方程式の基本解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ による

$$\boldsymbol{Y}(x)=\begin{bmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ \dfrac{dy_1(x)}{dx} & \dfrac{dy_2(x)}{dx}\end{bmatrix}$$

を用いて, 次式で与えられる。

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)-y_1(x)\int\frac{y_2(x)Q(x)}{\det\boldsymbol{Y}(x)}dx+y_2(x)\int\frac{y_1(x)Q(x)}{\det\boldsymbol{Y}(x)}dx \tag{2.35}$$

＜例 2-10＞ $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=\sqrt{x}\varepsilon^x$ の特殊解 $\eta(x)$

同次方程式の特性根から基本解を求めると,

$$\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2\quad\to\lambda=1\ (\text{重根}) \tag{2.36}$$

$$\Rightarrow\quad y_1(x)=\varepsilon^x,\ y_2(x)=x\varepsilon^x$$

この基本解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ に対して

$$\det\boldsymbol{Y}(x)=\begin{vmatrix}\varepsilon^x & x\varepsilon^x\\ \varepsilon^x & \varepsilon^x+x\varepsilon^x\end{vmatrix}=\varepsilon^{2x}+x\varepsilon^{2x}-x\varepsilon^{2x}=\varepsilon^{2x}$$

より,

$$\begin{aligned}\eta(x) &= -\varepsilon^x \int \frac{x\varepsilon^x\sqrt{x}\varepsilon^x}{\varepsilon^{2x}}dx + x\varepsilon^x \int \frac{\varepsilon^x\sqrt{x}\varepsilon^x}{\varepsilon^{2x}}dx \\ &= -\varepsilon^x \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x\varepsilon^x\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{15}x^2\sqrt{x}\varepsilon^x\end{aligned}$$

■

2.10 今週のレポート課題

1. 次の非同次方程式の特殊解 $\eta(x)$ を求めなさい。
   (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 - 6x$
   (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 4\cos x + 2\sin x$
   (c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 5y = 2\varepsilon^x$
2. 次の非同次方程式の一般解を求めなさい。
   (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 3y = \varepsilon^x + \varepsilon^{2x}$
   (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} = 5\sin x + 6\varepsilon^{3x}$
   (c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} = -4x + 8\sin 2x$
3. 次の非同次方程式の特殊解 $\eta(x)$ を求めなさい。
   (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{\varepsilon^{-x}}{x}$
   (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = \dfrac{\varepsilon^{2x}}{x^2+1}$
   (c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{\varepsilon^x}{\sqrt{1-x^2}}$