

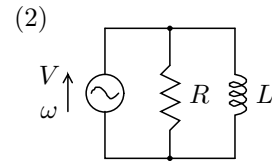
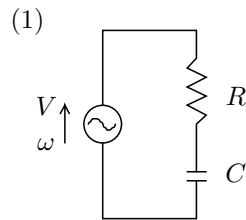
電気回路 演習 (第3回目：交流回路の電力と力率)

担当 岩崎

1. (復習) 電力の定義式

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) \cdot i(t) dt$$

を使って次の回路の有効電力を V と素子パラメータで表せ。



【解答】

(1) 電源電圧を $v(t) = \sqrt{2}V \sin \omega t$ とおけば，回路方程式は次式となる。

$$\sqrt{2}V \sin \omega t = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

これを解けば，

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin(\omega t + \theta_1), \quad \theta_1 = \tan^{-1} \frac{1}{\omega CR}$$

従って，瞬時電力は次式となる。

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{2V^2}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \frac{1}{2} \{ \cos \theta_1 - \cos(2\omega t + \theta_1) \}$$

ここで， $A = \frac{V^2}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$ とおけば，有効電力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{A}{T} \int_0^T \{ \cos \theta_1 - \cos(2\omega t + \theta_1) \} dt \\ &= \frac{A}{T} \int_0^T \cos \theta_1 dt = A \cos \theta_1 = \frac{V^2 \omega^2 C^2 R}{1 + (\omega CR)^2} \end{aligned}$$

(2) (1) と同様に電源電圧を $v(t) = \sqrt{2}V \sin \omega t$ とおく。回路方程式をたてて電源電流 $i(t)$ を求めると次式となる。

$$i(t) = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} \sqrt{2}V \sin(\omega t - \theta_2), \quad \theta_2 = \tan^{-1} \frac{R}{\omega L}$$

$B = 2V^2 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}}$ とおけば，瞬時電力は次式で与えられる。

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = B \sin \omega t \sin(\omega t - \theta_2) = \frac{B}{2} \{\cos \theta_2 - \cos(2\omega t - \theta_2)\}$$

従って，有効電力は次式となる。

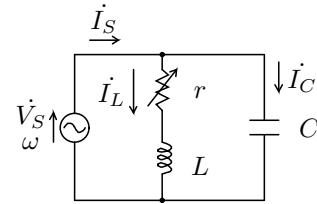
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{B}{T} \int_0^T \{\cos \theta_2 - \cos(2\omega t - \theta_2)\} dt = \frac{B}{2} \cos \theta_2 = \frac{V^2}{R}$$

2. (復習) 次の回路で可変抵抗 r により電源力率を 1 としたい。

(1) $\dot{I}_L, \dot{I}_C, \dot{I}_S$ を $\dot{V}_S, r, L, C, \omega$ で表せ。

(2) 電源力率 φ を求めよ。

(3) $\cos \varphi = 1$ を満足する r を L, C, ω で表せ。



【解答】

$$(1) \dot{I}_L = \frac{1}{r + j\omega L} \dot{V}_S, \dot{I}_C = j\omega C \dot{V}_S$$

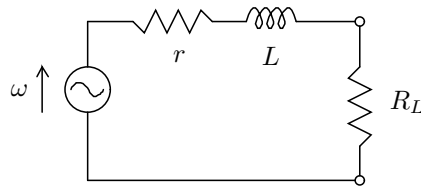
また， $\dot{I}_S = \dot{I}_L + \dot{I}_C$ より，

$$\dot{I}_S = \left(\frac{1}{r + j\omega L} + j\omega C \right) \dot{V}_S = \frac{\dot{V}_S}{r^2 + \omega^2 L^2} \left\{ r + j\omega (\omega^2 CL^2 + Cr^2 - L) \right\}$$

$$(2) \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega^2 CL^2 + \omega Cr^2 - \omega L}{r}$$

$$(3) r = \sqrt{\frac{L(1 - \omega^2 CL)}{C}}$$

3. 次の回路で， R_L で消費する電力が最大となる R_L を r, ω, L を用いて表せ。



【解答】

$v(t) = V \sin \omega t$ とおけば，回路方程式は次式となる。

$$V \sin \omega t = (r + R_L)i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

これを電流について解けば，次式となる。

$$i(t) = \frac{V}{\sqrt{(r + R_L)^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{r + R_L})$$

したがって、 R_L で消費する電力は次式で与えられる。

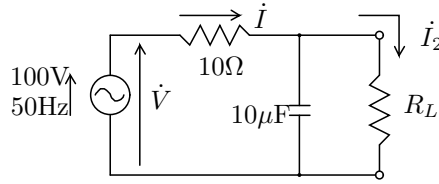
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_R(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T R_L \frac{V^2}{(r + R_L) + \omega^2 L^2} \sin^2(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{r + R_L}) dt$$

ここで、 $A = R_L \frac{V^2}{(r + R_L) + \omega^2 L^2}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{r + R_L}$ とすれば、

$$\begin{aligned} P &= \frac{A}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t - \theta) dt = \frac{A}{2T} \int_0^T \{1 - \cos 2(\omega t - \theta)\} dt \\ &= \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \frac{V^2 R_L}{R_L^2 + 2rR_L + r^2 + \omega^2 L^2} \\ &= \frac{V^2}{2} \frac{1}{R_L + \frac{r^2 + \omega^2 L^2}{R_L} + 2r} \leq \frac{V^2}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2} + 2r} \end{aligned}$$

等号成立は $R_L^2 = r^2 + \omega^2 L^2$ のときであるから、 $R_L = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}$ のときに消費する電力は最大となる。

4. 次の回路で、 R_L で消費する電力が最大となる R_L の値と、その時の電力を計算せよ。



【解答】

図のように $\dot{I}$, $\dot{I}_2$, $\dot{V}$ を定め、それぞれの時間関数を $i(t)$, $i_2(t)$, $v(t)$ とする。合成インピーダンス $\dot{Z}$ は次式となる。

$$\dot{Z} = r + \frac{1}{\frac{1}{R_L} + j\omega C} = r + \frac{R_L}{1 + j\omega C R_L} = \frac{r(1 + j\omega C R_L) + R_L}{1 + j\omega C R_L}$$

従って、

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}} = \frac{1 + j\omega C R_L}{r(1 + j\omega C R_L) + R_L} \dot{V}$$

であり、さらに

$$\dot{I}_2 = \frac{-j \frac{1}{\omega C}}{R_L - j \frac{1}{\omega C}} \dot{I} = \frac{-j}{\omega C R_L - j} \dot{I} = \frac{1}{1 + j\omega C R_L} \dot{I}$$

となるから、次式が導出される。

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{1 + j\omega C R_L} \frac{1 + j\omega C R_L}{r(1 + j\omega C R_L) + R_L} \dot{V} = \frac{1}{(r + R_L) + j\omega C R_L r} \dot{V}$$

つぎに、 $v(t) = V \sin \omega t$ とすれば、

$$i_2(t) = \frac{1}{\sqrt{(r + R_L)^2 + (\omega C R_L r)^2}} V \sin(\omega t - \theta), \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\omega C R_L r}{r + R_L}$$

となるから，有効電力は

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_0^T R_L (i_2(t))^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T R_L \frac{V^2}{(r + R_L)^2 + (\omega C R_L r)^2} \sin^2(\omega t - \theta) dt \\
 &= \frac{1}{2T} \cdot R_L \frac{V^2}{(r + R_L)^2 + (\omega C R_L r)^2} \int_0^T \{1 - \cos(2\omega t - 2\theta)\} dt \\
 &= \frac{V^2}{2} \cdot \frac{R_L}{(r + R_L)^2 + (r\omega C R_L)^2} \\
 &= \frac{V^2}{2} \cdot \frac{1}{R_L + 2r + \frac{r^2}{R_L} + r^2\omega^2 C^2 R_L} \leq \frac{V^2}{2} \frac{1}{2r + 2\sqrt{r^2(1 + r^2\omega^2 C^2)}}
 \end{aligned}$$

等号成立は $R_L^2(1 + r^2\omega^2 C^2) = r^2$ のときであるから，

$$R_L = \frac{r}{\sqrt{1 + (r\omega C)^2}} = \frac{10}{\sqrt{1 + \pi^2 \times 10^{-4}}} \simeq 10.0 \text{ } [\Omega]$$

R_L で消費する電力は $\frac{V}{\sqrt{2}} = 100 \text{ V}$ であることに注意して，

$$P_{Lmax} = 250 \text{ [W]}$$