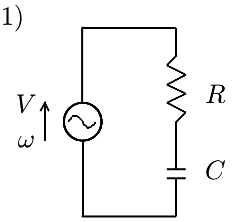
電気回路基礎II　演習 (第3回目：交流回路の電力と力率)

1. (復習)　電力の定義式

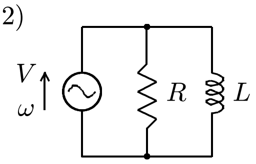
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\cdot i(t)dt$$

を使って次の回路の有効電力を V と素子パラメータで表せ。

(1)



(2)



【解答】

(1) 電源電圧を $v(t) = \sqrt{2}V\sin\omega t$ とおけば，回路方程式は次式となる。

$$\sqrt{2}V\sin\omega t = R\cdot i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

これを解けば,

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}V}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2}}}\sin(\omega t + \theta_1), \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}$$

従って，瞬時電力は次式となる。

$$p(t) = v(t)\cdot i(t) = \frac{2V^2}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2}}}\frac{1}{2}\left\{\cos\theta_1 - \cos(2\omega t + \theta_1)\right\}$$

ここで，$A = \dfrac{V^2}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2}}}$ とおけば，有効電力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{A}{T}\int_0^T \left\{\cos\theta_1 - \cos(2\omega t + \theta_1)\right\}dt \\ &= \frac{A}{T}\int_0^T \cos\theta_1 dt = A\cos\theta_1 = \frac{V^2\omega^2C^2R}{1 + (\omega CR)^2} \end{aligned}$$

(2) (1) と同様に電源電圧を $v(t) = \sqrt{2}V\sin\omega t$ とおく。回路方程式をたてて電源電流 $i(t)$ を求めると次式となる。

$$i(t) = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2L^2}}\sqrt{2}V\sin(\omega t - \theta_2), \quad \theta_2 = \tan^{-1}\frac{R}{\omega L}$$

$B=2V^2\sqrt{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{1}{\omega^2L^2}}$ とおけば，瞬時電力は次式で与えられる。

$$p(t)=v(t)\cdot i(t)=B\sin\omega t\sin(\omega t-\theta_2)=\frac{B}{2}\{\cos\theta_2-\cos(2\omega t-\theta_2)\}$$

従って，有効電力は次式となる。

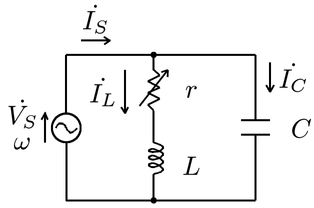
$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt=\frac{B}{T}\int_0^T\{\cos\theta_2-\cos(2\omega t-\theta_2)\}\,dt=\frac{B}{2}\cos\theta_2=\frac{V^2}{R}$$

2. (復習)　次の回路で可変抵抗 r により電源力率を 1 としたい。

(1) $\dot{I}_L$，$\dot{I}_C$，$\dot{I}_S$ を $\dot{V}_S$，r，L，C，ω で表せ。

(2) 電源力率 φ を求めよ。

(3) $\cos\varphi = 1$ を満足する r を L，C，ω で表せ。



【解答】

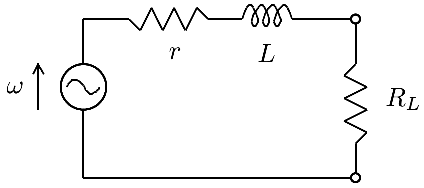
(1) $\dot{I}_L=\dfrac{1}{r+j\omega L}\dot{V}_s$, $\dot{I}_C=j\omega C\dot{V}_s$
また，$\dot{I}_s=\dot{I}_L+\dot{I}_C$ より，

$$\dot{I}_s=(\frac{1}{r+j\omega L}+j\omega C)\dot{V}_s=\frac{\dot{V}_s}{r^2+\omega^2L^2}\left\{r+j\omega\left(\omega^2CL^2+Cr^2-L\right)\right\}$$

(2) $\varphi=\tan^{-1}\dfrac{\omega^3CL^2+\omega Cr^2-\omega L}{r}$

(3) $r=\sqrt{\dfrac{L(1-\omega^2CL)}{C}}$

3. 次の回路で，R_L で消費する電力が最大となる R_L を r，ω，L を用いて表せ。



【解答】

$v(t)=V\sin\omega t$ とおけば，回路方程式は次式となる。

$$V\sin\omega t=(r+R_L)i(t)+L\frac{di(t)}{dt}$$

これを電流について解けば，次式となる。

$$i(t)=\frac{V}{\sqrt{(r+R_L)^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t-\tan^{-1}\frac{\omega L}{r+R_L})$$

したがって，R_L で消費する電力は次式で与えられる。

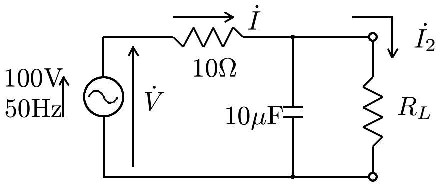
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p_R(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T R_L \frac{V^2}{(r+R_L)+\omega^2 L^2}\sin^2(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{r+R_L})dt$$

ここで，$A = R_L \dfrac{V^2}{(r+R_L)+\omega^2 L^2}$, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{r+R_L}$ とすれば,

$$\begin{aligned} P &= \frac{A}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t-\theta)dt = \frac{A}{2T}\int_0^T\{1-\cos 2(\omega t-\theta)\}dt \\ &= \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\frac{V^2 R_L}{R_L^2+2rR_L+r^2+\omega^2L^2} \\ &= \frac{V^2}{2}\frac{1}{R_L+\dfrac{r^2+\omega^2L^2}{R_L}+2r} \leq \frac{V^2}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2+\omega^2L^2}+2r} \end{aligned}$$

等号成立は $R_L^2 = r^2+\omega^2L^2$ のときであるから，$R_L = \sqrt{r^2+\omega^2L^2}$ のときに消費する電力は最大となる。

4. 次の回路で，R_L で消費する電力が最大となる R_L の値と，その時の電力を計算せよ。



【解答】
図のように $\dot{I}$, $\dot{I}_2$, $\dot{V}$ を定め，それぞれの時間関数を $i(t)$, $i_1(t)$, $v(t)$ とする。合成インピーダンス $\dot{Z}$ は次式となる。

$$\dot{Z} = r + \frac{1}{\frac{1}{R_L}+j\omega C} = r + \frac{R_L}{1+j\omega CR_L} = \frac{r(1+j\omega CR_L)+R_L}{1+j\omega CR_L}$$

従って,

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}} = \frac{1+j\omega CR_L}{r(1+j\omega CR_L)+R_L}\dot{V}$$

であり，さらに

$$\dot{I}_2 = \frac{-j\dfrac{1}{\omega C}}{R_L - j\frac{1}{\omega C}}\dot{I} = \frac{-j}{\omega CR_L - j}\dot{I} = \frac{1}{1+j\omega CR_L}\dot{I}$$

となるから，次式が導出される。

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{1+j\omega CR_L}\frac{1+j\omega CR_L}{r(1+j\omega CR_L)+R_L}\dot{V} = \frac{1}{(r+R_L)+j\omega CR_L r}\dot{V}$$

つぎに，$v(t) = V\sin\omega t$ とすれば，

$$i_2(t) = \frac{1}{\sqrt{(r+R_L)^2 + (\omega C R_L r)^2}} V\sin(\omega t - \theta), \quad \theta = \tan^{-1}\frac{\omega C R_L r}{r + R_L}$$

となるから，有効電力は

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T}\int_0^T R_L (i_2(t))^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T R_L \frac{V^2}{(r+R_L)^2 + (\omega C R_L r)^2}\sin^2(\omega t - \theta) dt \\
&= \frac{1}{2T}\cdot R_L \frac{V^2}{(r+R_L)^2 + (\omega C R_L r)^2}\int_0^T \{1 - \cos(2\omega t - 2\theta)\} dt \\
&= \frac{V^2}{2}\cdot\frac{R_L}{(r+R_L)^2 + (r\omega C R_L)^2} \\
&= \frac{V^2}{2}\cdot\frac{1}{R_L + 2r + \dfrac{r^2}{R_L} + r^2\omega^2 C^2 R_L} \leq \frac{V^2}{2}\frac{1}{2r + 2\sqrt{r^2(1+r^2\omega^2 C^2)}}
\end{aligned}$$

等号成立は ${R_L}^2(1 + r^2\omega^2 C^2) = r^2$ のときであるから，

$$R_L = \frac{r}{\sqrt{1 + (r\omega C)^2}} = \frac{10}{\sqrt{1 + \pi^2 \times 10^{-4}}} \simeq 10.0\ [\Omega]$$

R_L で消費する電力は $\dfrac{V}{\sqrt{2}} = 100$ V であることに注意して，

$$P_{Lmax} = 250\ [\mathrm{W}]$$